

TD N°1 : Les espaces vectoriels normés

Exercice 1

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose :

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2}, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} |a_{i,j}|.$$

Justifier que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_{n+1})$ une $(n+1)$ -liste de scalaires deux à deux distincts. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$ en posant : $\|P\| = \max(|P(a_1)|, \dots, |P(a_{n+1})|)$.
3. Montrer que l'application $N : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $P \longmapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} |P(t) - P'(t)|$ est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.
4. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Supposons que l'on dispose d'une norme $\|\cdot\|$ sur E , ainsi que d'un endomorphisme u de E . Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que l'application

$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \longmapsto \|u(x)\|$$

soit une norme sur E .

5. Soit $E = B(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'espace des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. Montrer que l'application suivante est une norme sur E :

$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{|a_n|}{2^n} \right).$$

Exercice 2

Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$, et $p \geq 1$. On considère l'application :

$$\mathcal{N}_p : C([a, b], \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad f \longmapsto \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p}.$$

1. Montrer que pour tout $p \geq 1$, $\mathcal{N}_p$ est une norme sur $C([a, b], \mathbb{K})$.
Indication : pour l'inégalité triangulaire, on pourra utiliser la convexité de la fonction $x \mapsto x^p$.
2. Pour $f \in C([a, b], \mathbb{K})$, montrer que

$$\mathcal{N}_p(f) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \mathcal{N}_\infty(f).$$

3. Le résultat de la première question subsiste-t-il si f est seulement supposée continue par morceaux ?

Exercice 3

Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $N(x_1, x_2) = \sup_{t \in [0,1]} |x_1 + tx_2|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter la boule unité fermée pour cette norme.

Exercice 4

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + f'(x)|.$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 5

Dans la suite $E = C([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on notera :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}.$$

Montrer que :

1. $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$ mais ne sont pas équivalentes.
2. $\|\cdot\|_2$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$ mais ne sont pas équivalentes.
3. $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_2$ mais ne sont pas équivalentes.

Exercice 6

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite périodique égal à son ensemble image.
2. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\sin(n))_{n \geq 1}$ est $[-1, 1]$.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E . Pour $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$A_p = \{u_n \mid n \geq p\}.$$

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{A_p}$.
2. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est fermé.

Exercice 8

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X], \quad \|P\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit *unitaire* si son coefficient dominant vaut 1.

1. Montrer que l'ensemble U des polynômes unitaires est fermé.
2. (a) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme scindé dans $\mathbb{R}[X]$, unitaire et de degré $r \in \mathbb{N}$, alors on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^r.$$

- (b) Montrer que l'ensemble S des polynômes unitaires et scindés dans $\mathbb{R}[X]$ est un fermé.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que l'adhérence de F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit H un hyperplan de E . Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E .